技術社会システム

第7回：縮小・分割統治法(続き)

担当教員：蓮池 隆(はすいけ たかし)
連絡先：thasuike@waseda.jp

前回の解答です

演習6-2

- Aさんは 1 から 1,000,000 までの数字の中の一つを紙に書いて持っているとする.
- この数を「はい」か「いいえ」で答えられる質問を繰り返し質問していくことで当てる.

(例)　一の位は3ですか？　(←ちなみにこれは非効率的)

1~100,000の間に入ってますか?

- 最悪の場合でも何回以下の質問数で答えを当てることができるか?

(ヒント：ある戦略にしたがい，範囲をうまく設定しながら聞いていけばよい**(縮小統治法)**)

解答

ポイント：範囲を半分ずつに分けて聞いていく

(例)

- 数字は1から500,000までに入っていますか→はい
- 数字は1から250,000までに入っていますか→いいえ
- 250,000から500,000までに入っていますか→はい
- …

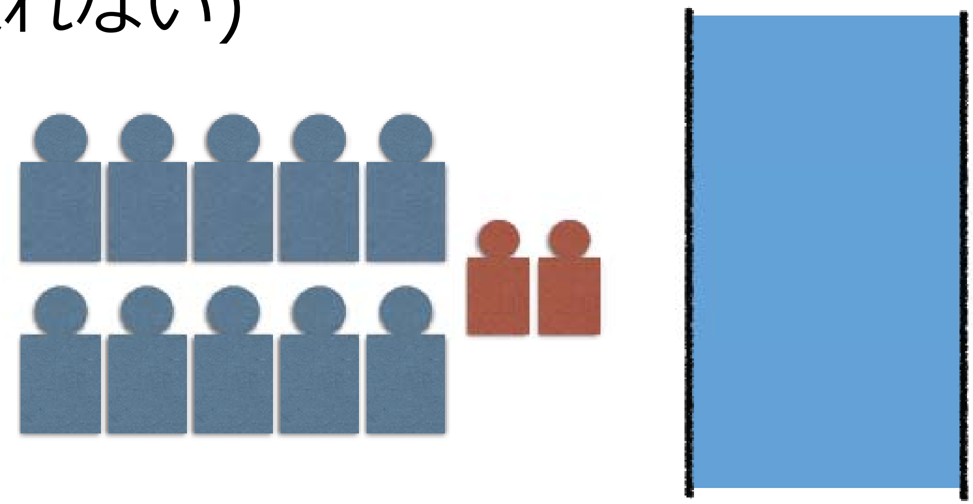
- **1回の質問で候補の数は半分ずつになる(縮小統治法)**

  ➡最悪 $\log_2 1000000 \fallingdotseq 19.93 \fallingdotseq 20$回 で当てることができる.
- 実はこの方法が最適であることを示すこともできる.

続けて前回の解答です

演習6-3

- 大人10名，子供2名の集団が川の片側におり，一隻の船のみを用いて川を渡ろうとしています.
- 以下の条件の下で，船を何度使用すれば全員が川を渡れますか？ただし，一方の岸から他方の岸への移動をするごとに，船を一度使用したこととみなす.
- 条件：船は子供1名でも動かせる．また船に同時に乗れる人数は大人は1名まで，子供は2名まで．(大人が1名乗ると子供は乗れない)



解答

以下の４つのステップを一回の操作とみなす：

- STEP1：子供二人で向こうへ渡る
- STEP2：子供一人で戻ってくる
- STEP3：大人一人で向こうへ渡る
- STEP4：子供一人で戻ってくる

➡**船を４回の使用し，元の岸にいる大人が一人減る(縮小統治法)**

- よって，大人10名が向こうへ渡るのに船を**4×10＝40回**使用し，**最後に子供二人が向こうへ渡るのに船を1回**使用する.
- よって，**計41回船を使用する**.

(前回の復習)縮小・分割統治法

縮小統治法

- 問題を**サイズの小さな問題に帰着させる**ことを繰り返す手法.
- 最終的には最もサイズの小さな問題を解決することで，最初の問題の解を得ることができる.

分割統治法

- 問題を**サイズの小さな問題に分割**し、各問題を解決することで，最初の問題を解決する手法

➡これらの考え方は幅広い問題に対して有効！

それでは今日の演習です

演習7－1

- 外見では区別できない27枚の硬貨がある.
- この中に1枚だけ，本物の硬貨よりも軽い偽造硬貨が含まれているとする.
- このとき，重りのない天秤を使って偽造硬貨を決定する方法を述べよ．また，最悪の場合でも何回以下の試行数で偽物を当てることができるか.

解答

演習7－1

- **STEP1: 硬貨を3つのグループに等分割する**

- STEP2:グループIとグループIIを天秤に載せ，重さを比較
- STEP3: STEP2の結果はいずれかになる.
  – グループIのほうが軽い → グループIを残す
  – グループIIのほうが軽い → グループIIを残す
  – グループIとグループIIが釣り合う → グループIIIを残す

- **このとき，残されたグループ内に偽造硬貨が入っている**
  →候補の数が 1/3 になる(縮小統治法)

解答

9つになったコインを先ほどと同じように分割する！

- **STEP1: 硬貨を3つのグループに等分割する**

- STEP2:グループIとグループIIを天秤に載せ，重さを比較
- STEP3: STEP2の結果はいずれかになる.
  - グループIのほうが軽い → グループIを残す
  - グループIIのほうが軽い → グループIIを残す
  - グループIとグループIIが釣り合う → グループIIIを残す

- **このとき，残されたグループ内に偽造硬貨が入っている**
  →候補の数が 1/3 になる(縮小統治法)

解答

3つになったコインを先ほどと同じように分割する！

- **STEP1: 硬貨を3つのグループに等分割する**

- STEP2:グループIとグループIIを天秤に載せ，重さを比較
- STEP3: STEP2の結果はいずれかになる.
  - グループIのほうが軽い → グループIを残す
  - グループIIのほうが軽い → グループIIを残す
  - グループIとグループIIが釣り合う → グループIIIを残す

- **残されたコインが偽物！→よって天秤の使用回数は3回！**

少し問題を変形します

演習7－2

- 外見では区別できない27枚の硬貨がある.
- この中に1枚だけ，本物の硬貨よりも重さが異なる(重いか軽いかは不明)偽造硬貨が含まれているとする.
- このとき，重りのない天秤を使って偽造硬貨を決定する方法を述べよ．また，最悪の場合でも何回以下の試行数で偽物を当てることができるか.

解答例

演習7－2

- 先ほどと同様に，27個を9個ずつ3つのグループに分ける．

- 次に，グループIとIIを天秤で比較

①Iが下に，IIが上に傾いた場合

→偽造硬貨が重いためIに入っている or 軽いためIIに入っているのどちらか

→IとIIIを比較し，Iが下に傾けば，偽造硬貨は重く，かつIに含まれていることがわかる．

IとIIIがつりあえば，偽造硬貨は軽く，かつIIに含まれていることがわかる．

解答例

<u>演習7－2</u>

- 先ほどと同様に，27個を9個ずつ3つのグループに分ける．

- 次に，グループIとIIを天秤で比較

  ②IとIIがつりあった場合

  →IIIに偽造硬貨が含まれていることはわかる．しかし，偽造硬貨が重いか軽いかはわからない．

  →IとIIIを比較し，Iが下に傾いた場合は，偽造硬貨が軽いことがわかる．

  Iが上に傾いた場合，偽造硬貨は重いことがわかる．

- **①,②ともに2回で，偽造硬貨がどのグループに入っているか＋それが重いかどうかまでわかる**

解答例

演習7－2

- 先ほどと同様に，27個を9個ずつ3つのグループに分ける.

- あとは偽造硬貨の入っている9個を調べればよいが，既に重いか軽いかまでもわかっているため，**演習7-1の9個の場合の話と同じ＝2回で偽造硬貨1枚を発見可能**

- よって27個の場合，**最悪でも2＋2＝4回**天秤を利用することで偽造硬貨1枚を発見することが可能.

問題を一般化しましょう

演習7－3

- 外見では区別できないN枚の硬貨がある.
- この中に1枚だけ，本物の硬貨よりも軽い偽造硬貨が含まれているとする.
- このとき，**重りのない天秤をk回だけ使って，偽造硬貨が決定できるような，最大のN**をkを用いて表せ.

解答例

<u>演習7－3</u>

- 演習7-1で示したように，最後に3つ残れば，どれが偽造硬貨か判別することができる.

- その1つ前段階では，3つ残るようにグループ分けをすることになるため，9個までなら，最後に3つ残すことが可能となる.

- (参考：8個のときは，3個, 3個, 2個にわけて，3個どうしを比較する．傾けば軽い方の3個に，つりあえば残した2個のどちらかが偽造硬貨)

解答例

演習7－3

- つまり…
  - 1回しか使えないときは，3個
  - 2回しか使えないときは，9個＝3^2個
  - 3回ならば，9個(＝3^2個)が3グループで27個＝3^3個
  - …

- これを繰り返すことになるので，k回利用できるとすれば，**最大でN＝3^k個**までであれば，1個の偽装効果を発見することが可能である.